逆矩阵及应用

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 10 月 18 日

主要内容

1 逆矩阵

2 逆矩阵的性质

3 逆矩阵的初步应用

4 解方程组-克拉默法则

逆矩阵

定义

假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 $\exists B \in M_{n\times n}$ 使得

$$AB = E_n = BA,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 为 A 的**逆矩阵**.

逆矩阵

定义

假设 $A \in M_{n\times n}$. 若 $\exists B \in M_{n\times n}$ 使得

$$AB = E_n = BA,$$

则称 A 是**可逆矩阵**, B 为 A 的**逆矩阵**.

命题

若 A 有逆矩阵, 则逆矩阵是唯一的.

因为假设 B_1 和 B_2 均是 A 的逆矩阵, 则

$$B_1 = B_1 E = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = EB_2 = B_2.$$

A 的逆矩阵记为 A^{-1}.

定义

假设 A 是 n 阶方阵, 它的 (i,j) 元的代数余子式记为 A_{ij}. 称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的**伴随矩阵**.

定义

假设 A 是 n 阶方阵，它的 (i,j) 元的代数余子式记为 A_{ij}. 称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的**伴随矩阵**.

命题

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

证明.

记 $A = (a_{ij})$, $AA^* = (b_{ij})$. 则

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = \begin{cases} |A|, & 当 i = j \\ 0, & 当 i \neq j. \end{cases}$$

所以,

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

类似地, $A^*A = |A|E$. □

定理

若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

证明.

若 A 可逆, 则 $\exists B$ 使得 $AB = E$. 又 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$. □

定理

若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

证明.

若 A 可逆, 则 $\exists B$ 使得 $AB = E$. 又 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$. □

由前一命题可得

定理

若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

此处 A^* 是 A 的伴随阵.

定义

若 $|A| = 0$, 则 A 是**奇异矩阵**, 否则 A 是**非奇异矩阵**.

由上述定理可知,

$$A\text{可逆} \Longleftrightarrow A\text{非奇异}.$$

定义

若 $|A|=0$, 则 A 是**奇异矩阵**, 否则 A 是**非奇异矩阵**.

由上述定理可知,

$$A\text{可逆} \Longleftrightarrow A\text{非奇异}.$$

推论

若 $AB=E$ 或 $BA=E$, 则 $B=A^{-1}$.

证明.

若 $AB=E$, 则 $|A||B|=|E|=1$. 那么 $|A|\neq 0$. 所以 A 可逆, 将它的逆记为 A^{-1}. 另外, $A^{-1}AB=A^{-1}E$. 所以 $B=A^{-1}$. □

若要验证 B 是 A 的逆矩阵, 只需验证 $AB=E$ 或者 $BA=E$.

逆矩阵与逆映射

之前讲到，一个方阵 $A \in M_{n\times n}$ 给出一个线性映射

$$\begin{aligned} L_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

即对任一列向量 $X \in \mathbb{R}^n$, $L_A(X) = AX$. 而且矩阵的乘法对应映射的复合:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^n \\ X \mapsto BX \mapsto ABX \end{aligned}$$

即 $\forall$ 列向量 $X \in \mathbb{R}^n$,

$$(L_A \circ L_B)(X) = L_A(L_B(X)) = L_A(BX) = A(BX) = (AB)X = L_{AB}(X).$$

若 A 可逆, 记它的逆为 A^{-1}, 则

$$(L_A \circ L_{A^{-1}})(X) = A(A^{-1}X) = (AA^{-1})X = EX = X$$

$$(L_{A^{-1}} \circ L_A)(X) = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$$

因此, L_A 和 $L_{A^{-1}}$ 互为逆映射.

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

问题

$|A^{-1}| = ?$

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

问题

$|A^{-1}| =?$

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

证明.

$$(\frac{1}{\lambda} A^{-1})(\lambda A) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(A^{-1} A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. □

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

证明.

$$(\frac{1}{\lambda} A^{-1})(\lambda A) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(A^{-1} A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. □

(iii) 若 A 和 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

证明.

$$(\frac{1}{\lambda} A^{-1})(\lambda A) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(A^{-1}A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. □

(iii) 若 A 和 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证明.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E.$$

(iv) 若 A 可逆, 则 A^T 可逆.

证明.

因为

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

所以 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

记号:
若 A 可逆, $k > 0$,

$$A^0 = E,\ A^{-k} := (A^k)^{-1}.$$

那么, 对于 $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$A^{k+l} = A^k \cdot A^l,\ (A^k)^l = A^{kl}.$$

相关例子

例子

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

首先, $|A| = ad - bc$. 另外,

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

则

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($|A| = -1$, 则 A 可逆.) 求 A^{-1}.

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($|A| = -1$, 则 A 可逆.) 求 A^{-1}.

$$M_{11} = 8 - 9 = -1 \quad M_{12} = 4 - 3 = 1 \quad M_{13} = 3 - 2 = 1$$

$$M_{21} = 8 - 6 = 2 \quad M_{22} = 4 - 2 = 2 \quad M_{23} = 3 - 2 = 1$$

$$M_{31} = 6 - 4 = 2 \quad M_{32} = 3 - 2 = 1 \quad M_{33} = 2 - 2 = 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵的初步应用

例子

假设 A, B 可逆 (不一定同阶),

$$AXB = C,$$

则

$$X = A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}.$$

例子

假设 $AP = P\Lambda$, Λ 为对角阵, P 可逆. 求 A^n.

一般求 A^n 会比较复杂, 希望转成 Λ^n 的计算.

例子

假设 $AP = P\Lambda$, Λ 为对角阵, P 可逆. 求 A^n.

一般求 A^n 会比较复杂, 希望转成 Λ^n 的计算.
注意到 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则

$$A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{n\text{ 个}}$$

$$= P\Lambda^n P^{-1}.$$

例子

设 $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, $A \in M_{n\times n}$. 记

$$\varphi(A) = a_0 + a_1 A + \cdots + a_m A^m,$$

称为矩阵 A 的 m 次多项式.

注意: 若 ψ 是另一多项式, 则 $\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A)$.
希望利用上例计算 $\varphi(A)$.

若 $A = P\Lambda P^{-1}$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则

$$
\begin{aligned}
&\varphi(A) \\
=&a_0 + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\
=&P a_0 P^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + a_2 P\Lambda^2 P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1} \\
=&P \begin{pmatrix} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_m\lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_m\lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1} \\
=&P\varphi(\Lambda)P^{-1}.
\end{aligned}
$$

解方程组-克拉默法则

之前, 我们见过以下克拉默法则的二阶版本.
给定线性方程组

$$Ax = b.$$

其中, $A \in M_{n\times n}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$.

定理 (克拉默法则)

假设 $|A| \neq 0$. 记 A_i 为将系数矩阵 A 的第 i 列换成 b 的矩阵, 则 $Ax = b$ 有唯一解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

证明: 由于 $|A| \neq 0$, A 可逆. 方程有唯一解:

$$x = A^{-1}b.$$

另外, 由 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, 方程的解为

$$x = \frac{A^* b}{|A|} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

则

$$
\begin{aligned}
x_i &= \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n}{|A|} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_1 & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \\
&= \frac{|A_i|}{|A|}.
\end{aligned}
$$

□

总结: 目前我们有两种方法解 $Ax = b$:

(i) $x = A^{-1}b$;

(ii) 克拉默法则.

例子

解方程组 $Ax = b$. 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例子

解方程组 $Ax = b$. 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

方法一: (先求 A^{-1}.) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$|A| = 6 + 1 - 2 - 7 + 3 - 1 = 3.$

则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

方法二 (克拉默法则)

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(6+1-1-2+3-1) = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(3+1+2-2-3-1) = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(2-2+1-4+1-1) = -1$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \end{pmatrix}.$$